



강성 다중점 구속조건이 적용된 기어박스 하우징 해석모델의 효율적인 수치해석을 위한 고성능 차수 감소 모델링의 적용

김성은^{a†}, 이재철^{b†}, 안준걸^a, 양현익^{a*}

Applications of High-fidelity Reduced-order Modeling for an Efficient Numerical Analysis of the Gearbox-housing Analysis Model with Rigid Multipoint Constraints Applied

Sung-Eun Kim^{a†}, Jae-Chul Lee^{b†}, Jun-Geol Ahn^a, Hyun-Ik Yang^{a*}

^a Department of Mechanical Design Engineering, Hanyang University

^b Material & Component Convergence R&D Department, Korea Institute of Industrial Technology (KITECH)

ARTICLE INFO

Article history:

Received	11	June	2021
Revised	15	July	2021
Accepted	23	July	2021

Keywords:

Reduced order modeling
Multi-point constraints
Lagrange multiplier
Dynamic correction

ABSTRACT

The vibration analysis of a gearbox housing model is essential for the design of an electric vehicle but requires large computational costs. In this study, we applied a high-fidelity reduction technique to analyze the gearbox housing model for an efficient numerical analysis. Moreover, the rigid multi-point constraints (MPCs) were employed to establish a connection between the housing and the internal mechanical parts. A governing equation was established from the Lagrange multiplier-based formulation to unify the reduction process and the application of the rigid MPCs. Furthermore, the dynamic correction technique was applied to the unified reduction process to compensate for the reliability of the reduced model. Consequently, the reduction model had reduced computational costs and high accuracy. Thus, the proposed model that has connection points between the housing and the shaft can be used to reflect the effects of the other gear, shaft and bearing parts on the gearbox housing.

1. 서론

최근 산업에서 모듈화가 가속함에 따라 기어박스 하우징의 경량화 및 소형화에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 특히, 하우징의 경량화 및 소형화로 인하여 하우징 뿐 아니라 샤프트 등으로 인한 소음 및 진동의 문제가 야기 될 수 있기 때문에 샤프트와 하우징이 동시에 고려된 동적 해석이 활발하게 연구되고 있다^[1-3]. 다중점 제약조건(multipoint-constraints, MPCs)은 여러 기계 요소들에 대한 연결을 수치적으로 구현하기 위해 주로 사용되는 방법이다.

이러한 다중점 제약조건들 중에서도 강성 다중점 구속조건(rigid MPCs)은 샤프트의 회전 중심축과 하우징과 샤프트의 접촉이 발생하는 부분에서의 병진, 회전 조건 들을 손쉽게 구현할 수 있기 때문에 샤프트의 효과가 고려되어야 하는 하우징 동적 해석에 널리 사용되고 있다^[4].

강성 다중점 구속조건이 적용된 하우징 수치 모델이 샤프트 등의 다른 기계요소의 영향을 고려할 수 있는 방안임에도 불구하고 여전히 해결되어야 할 문제들을 포함하고 있다. 특히, 정교한 동적 거동을 묘사하기 위해서는 많은 수의 자유도(degrees of freedom,

[†] These authors contributed equally to this work.

* Corresponding author. Tel.: +82-31-436-5285

E-mail address: skynet@hanyang.ac.kr (Hyun-Ik Yang).

DOF)를 바탕으로 강성 다중점 구속조건이 구현되어야 하므로 막대한 계산비용과 소요시간이 발생하게 된다.

따라서, 본 논문에서는 이러한 문제들을 해결하고자 본 논문에서는 고성능 차수 감소 모델링(reduced-order modeling, ROM)을 활용하여 강성 다중점 구속조건이 적용되는 하우징에 대한 효율적인 해석 방안을 제시하고자 한다. 제안된 방법에서는 강성 다중점 구속조건을 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier method)을 사용하여 하우징에 구현하였다^[5]. 구현된 수치 모델이 가지는 막대한 계산비용 문제를 해결하기 위해 소프트의 움직임을 하우징에 연결해 줄 수 있는 응축 노드(condensation node)로의 차수 감소를 이용하여 적은 계산비용을 가지는 하우징 모델을 생성하였다^[5]. 또한, 이러한 차수 감소 과정에서 불가피하게 발생하는 정확도 하락을 효과적으로 보정하기 위해, 동적 보상방법(dynamic correction)을 추가적으로 적용하였다^[5].

결과적으로, 본 논문에서 제시되는 하우징 모델은 기존 모델에 비해 매우 작은 차원을 가지며, 이로 인해 기존 수치 모델이 가지는 막대한 계산비용 문제가 효율적으로 처리될 수 있었다. 또한, 본 논문에서의 차수 감소 과정에서 추가적으로 적용된 동적 보상방법으로 인하여 모델의 차원이 크게 감소하였음에도 불구하고, 높은 정확도를 가지는 감축 모델이 차원의 변화 없이 생성될 수 있었다.

2. 차수 감소 모델링

2.1 Rigid MPCs

강성 다중점 구속조건(rigid MPCs)은 외력을 전달받는 구속 노드들(constraint nodes)에 대해 이 노드들을 하나로 표현하는 압축 노드(condensation node)를 정의하여 압축 노드의 움직임을 통해 구속 노드들의 움직임을 예측할 수 있는 방법이다^[6]. 강성 다중점 구속조건에 대한 간단한 예는 Fig. 1에 묘사되어 있다. Fig. 1에서 압축 노드는 원통의 중앙에 위치하며, 구속 노드는 원통 구조에서 압축 노드에 가까운 노드들로 지정하였다. 압축 노드와 구속 노드 간의 변위 차에 대한 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{x}_{c,k} = \mathbf{x}_m - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\alpha}_m, \quad (1a)$$

$$\mathbf{x}_{c,k} = \begin{bmatrix} x_{cx,k} \\ x_{cy,k} \\ x_{cz,k} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} 0 & -r_{kz} & r_{ky} \\ r_{kz} & 0 & -r_{kx} \\ -r_{ky} & r_{kx} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_m = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}. \quad (1b)$$

여기서 변수 \mathbf{x} 와 $\boldsymbol{\alpha}$ 는 변위 및 회전각을 의미하며, 또한 \mathbf{r} 은 압축 노드와 구속 노드 사이의 거리 벡터를 나타낸다. 아래 첨자

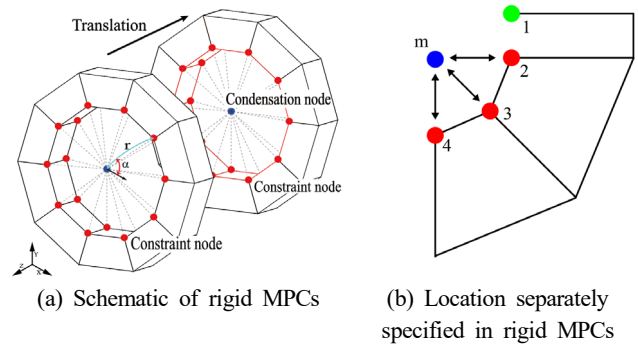


Fig. 1 Simple example of the rigid MPCs

c와 m은 각각 구속 노드와 압축 노드를 의미한다. 구속 노드 총 개수는 아래 첨자 k로 표현된다. 식 (1)에 나타나 있는 구속조건은 다음과 같이 매트릭스 \mathbf{A} 를 사용하여 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_s \ \mathbf{A}_m], \ \mathbf{A}_s = [\mathbf{A}_c \ \mathbf{A}_u], \quad (2b)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_u \end{bmatrix}, \quad (2c)$$

식 (2)에서 \mathbf{u} 는 병진과 회전 자유도를 모두 포함한 변위 벡터이다. 아래 첨자 u와 s는 각각 비구속(unconstraint) 노드와 structure 노드를 의미한다. Structure 노드는 구속과 비구속 노드 모두를 포함하는 노드이다.

Fig. 1에서 보는 바와 같이 비구속 노드가 1번이고 k가 4일 때 식 (1)을 적용하여 매트릭스 \mathbf{A} 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = [\mathbf{A}_s \ \mathbf{A}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \ \mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad (3a)$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} \ \mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{I}_{3 \times 3} \ \mathbf{C}_3 \\ -\mathbf{I}_{3 \times 3} \ \mathbf{C}_4 \end{bmatrix}, \quad (3b)$$

여기서 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 은 3차 단위행렬을 의미한다. 식 (3)과 같이 압축 노드와 구속 노드에 대한 식을 정리함으로 강성 다중점 구속조건을 적용할 수 있다. 운동 방정식에 MPCs를 적용하는 기존의 방법은 다음 섹션에서 이어서 설명한다.

2.2 Rigid MPCs with conventional method

비감쇠 자유진동 조건에서 기어박스 하우징의 운동 방정식은 다음과 같다^[7,8].

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}. \quad (4)$$

($\ddot{}$) = d^2/dt^2 이며 2차 미분 인자를 의미하고 \mathbf{F} 는 외력을 나타낸다. 강성 다중점 구속조건을 적용하기 위해 질량 행렬과 강성 행렬을 구속과 비구속 부분으로 나누어 정리하면 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\mathbf{M}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{cc} & \mathbf{M}_{cu} \\ \mathbf{M}_{uc} & \mathbf{M}_{uu} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cu} \\ \mathbf{K}_{uc} & \mathbf{K}_{uu} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_c \\ \mathbf{F}_u \end{bmatrix}. \quad (5)$$

식 (2)와 식 (3)을 통해 변환 행렬을 구하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}_m \\ \mathbf{I}_{N_u \times N_u} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_m \times N_m} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

여기서 N_u 와 N_m 은 각각 unconstraint node와 condensation node의 자유도 수를 의미한다. 식 (6)에서 구한 변환 행렬을 사용하여 질량 행렬과 강성 행렬에 Galerkin projection을 적용하면 다음과 같이 강성 다중점 구속조건을 적용할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{T}. \quad (7)$$

윗 첨자 T는 전치 행렬(transpose matrix)을 의미한다. 식 (7)에서 구한 질량 행렬과 강성 행렬을 운동 방정식인 식 (4)에 대입함으로써 강성 다중점 구속조건을 운동 방정식에 적용할 수 있다. 식 (1)에서 알 수 있듯 이 방법은 정확도를 높이기 위해서 많은 수의 자유도가 필요하다. 이러한 한계점을 보완하기 위해 라그랑지 승수법을 사용하여 강성 다중점 구속조건을 적용하고자 하였다.

2.3 Rigid MPCs with Lagrange multiplier

운동 방정식에 강성 다중점 구속조건을 사용하기 위해서 라그랑지 승수법을 구속조건 내에서 극값을 찾는 수단으로 사용할 수 있다. 먼저 n개의 변수에 대한 라그랑지 벡터는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n]^T. \quad (8)$$

라그랑지 벡터를 벡터 \mathbf{u} 에 포함시키고 질량 행렬과 강성 행렬을 새로 정의된 \mathbf{u} 에 맞게 정리한다^[5].

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{A}_s^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_s & \mathbf{0} & \mathbf{A}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_m \end{bmatrix}. \quad (9b)$$

라그랑지 승수법에 대한 정의와 식 (9)를 사용하여 식 (2)를 다음과 같이 라그랑지 벡터를 포함한 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{A}_s^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_s & \mathbf{0} & \mathbf{A}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

식(10)을 \mathbf{x}_m 과 \mathbf{T}_n 의 곱으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n \mathbf{x}_m, \quad (11)$$

이를 \mathbf{u}_m 에 대해 정리하고 Galerkin projection을 적용하여 이에 대한 질량과 강성 행렬을 구한다.

$$\bar{\mathbf{M}}_{LM} \ddot{\mathbf{u}}_m + \bar{\mathbf{K}}_{LM} \mathbf{u}_m = \bar{\mathbf{F}}, \quad (12a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{LM} = \mathbf{T}_n^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{T}_n, \quad \bar{\mathbf{K}}_{LM} = \mathbf{T}_n^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{T}_n, \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{T}_n^T \mathbf{F}, \quad (12b)$$

여기서 아래 첨자 LM은 라그랑지 승수법을 적용한 것을 나타낸다. 식 (12)와 같이 라그랑지 승수법을 적용한 변환 행렬을 사용하여 강성 다중점 구속조건을 운동 방정식에 적용할 수 있다. Galerkin projection을 진행하면 질량 행렬과 강성 행렬의 차수가 감소하고 필연적으로 이에 따른 오차가 발생하게 된다. 이를 보완하기 위해 라그랑지 승수법을 적용한 방법에서는 비교적 작은 계산비용으로 동적 보정방법을 구하여 오차를 줄일 수 있다. 식 (11)에서 \mathbf{T}_n 을 구하면 정적 상태에 대한 \mathbf{T}_S 와 동적 상태에 대한 \mathbf{T}_{D1} 를 다음과 같이 구할 수 있다^[5].

$$\mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} -\hat{\boldsymbol{\psi}}_{sm} \\ \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda m} \\ \mathbf{I}_{N_m \times N_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{D1} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{D}}_{sm}^{d(1)} \\ \hat{\mathbf{D}}_{\lambda m}^{d(1)} \\ \mathbf{0}_{N_m \times N_m} \end{bmatrix}, \quad (13a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_{sm} = \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{A}_s^T \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda m}, \quad \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda m} = (\mathbf{A}_s^{-1})^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{A}_m, \quad (13b)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{sm}^{d(1)} = \hat{\boldsymbol{\psi}}_{sm} \hat{\mathbf{D}}_{\lambda m}^{d(1)} + \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{M}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{A}_s^T \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda m}, \quad (13c)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{\lambda m}^{d(1)} = -(\mathbf{A}_s^{-1})^T \mathbf{M}_{ss}^{-1} \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{A}_m, \quad (13d)$$

여기서 아래 첨자 S와 D1은 각각 정적 변환 부분과 1차 동적

변환 부분을 의미한다. 윗 첨자 $d(1)$ 은 동적 보정방법을 적용한 횡수를 괄호 안에 표시하여 나타내었다. 식 (10)에서 자유진동 상태를 가정했을 때 harmonic response인 ω^2 은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\omega^2 = [\bar{\mathbf{M}}_{LM}^{d(0)}]^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{LM}^{d(0)}, \quad (14a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{LM}^{d(0)} = \bar{\mathbf{M}}_{LM}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{LM}^{d(0)} = \bar{\mathbf{K}}_{LM}, \quad (14b)$$

식 (13)과 식 (14)를 정리하여 1차 동적 보정방법을 적용한 변환 행렬 $\mathbf{T}_{LM}^{d(1)}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{T}_{LM}^{d(1)} = \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_{D1} \left([\bar{\mathbf{M}}_{LM}^{d(0)}]^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{LM}^{d(0)} \right). \quad (15)$$

2차 동적 보정방법은 1차 동적 보정방법에서의 항을 재사용하며, 결과적으로 1차 동적 보정방법과 유사하게 ω^2 차수만을 남기도록 한다. 따라서, 2차 동적 보정방법의 변환 행렬 $\mathbf{T}_{LM}^{d(2)}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{T}_{LM}^{d(2)} = \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_{D1} \left([\bar{\mathbf{M}}_{LM}^{d(1)}]^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{LM}^{d(1)} \right) + \dots + \mathbf{T}_{D2} \left([\bar{\mathbf{M}}_{LM}^{d(0)}]^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{LM}^{d(0)} \right) \left([\bar{\mathbf{M}}_{LM}^{d(1)}]^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{LM}^{d(1)} \right). \quad (16)$$

식 (15)와 식 (16)을 통해 n차까지 적용하여 일반화하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathbf{T}_{LM}^{d(n)} = \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_{D1} \omega^2 + \dots + \mathbf{T}_{Dn} (\omega^2)^n, \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{LM}^{d(n)} = \mathbf{T}_{LM}^{d(n)} \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T}_{LM}^{d(n)}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{LM}^{d(n)} = \mathbf{T}_{LM}^{d(n)} \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T}_{LM}^{d(n)}. \quad (18)$$

위와 같이 라그랑지 승수법을 적용한 강성 다중점 구속조건을 적용하여 하우징 모델링을 구현하였다. 그리고 하우징 모델링에서 차수 감소에 따른 오차는 다음 장에서 검증하고자 한다.

3. 수치해석 결과

3.1 기어박스 하우징 모델링

하우징은 기어박스에서 기어를 외부로부터 보호하는 구성요소이며 구동시 발생하는 샤프트의 진동을 감쇄시키는 베어링을 고정시키는 역할을 한다. 이와 같은 역할을 하는 하우징은 기어박스를 구성하는 요소 중 무게를 감소시킬 수 있는 주요 부분이자 변속기 전체의 크기를 줄일 수 있는 핵심적인 부분이다. 경량화와 소형화를 진행하면서도 앞서 언급한 하우징의 기능을 유지하는 것이 주요한 과제이다. 본 논문에서의 모델링의 대상은 기존 내연기관보

다 소형화가 진행된 전기자동차의 기어박스 하우징을 대상으로 하였다. 또한, 샤프트 등에서 전달되는 진동 영향을 효과적으로 고려하기 위해 강성 다중점 구속조건을 적용하였다.

하우징을 구성하는 재료는 알루미늄이며, 이를 수치적으로 해석하기 위해 유한요소 방법을 사용하였다. 유한요소 방법을 구현하기 위한 mesh는 3d element로 구성하였으며, 강성 다중점 구속조건은 압축 노드와 구속 노드들을 활용하며 구현되었다. 이 작업에서 사용되는 하우징에 대한 mesh 결과 및 강성 다중점 구속조건을 위한 노드들의 조건은 Fig. 2와 Fig. 3에 묘사되어 있다. 또한, 본 논문에서 사용되는 하우징의 물성치, 자유도 등의 정보는 Table 1에 수록되어 있다. 본 논문에서는 MATLAB (R2020b)을 사용하여 수치해석 결과들을 도출하였다. 다음 섹션에서는 강성 다중점 구속조건에 대한 설명과 본문에서 사용하는 강성 다중점 구속조건이 적용된 하우징에 대한 차수 감소 과정을 설명하고자 한다.

3.2 Eigenvalue

강성 다중점 구속조건을 적용하는 기존의 방법과 라그랑지 승수법을 사용하는 두 모델의 성능을 평가하기 위해 주파수영역의 고유진동수를 계산하여 그 결과를 비교하였다. 고유진동수의 상대적인 오차값은 다음과 같이 정의된다⁹⁾.

$$\xi_i = \frac{\bar{\lambda}_i - \lambda_i}{\lambda_i}. \quad (19)$$

ξ_i 은 모드 i번째에서 고유진동수의 상대적인 오차값을 의미하며 λ_i 와 $\bar{\lambda}_i$ 는 각각 레퍼런스 고유값과 비교대상의 고유값을 의미한다. 이미 구해진 질량과 강성 행렬의 고유값을 계산함으로써 하우징의 고유진동수에 대한 응답특성을 비교하였다. Fig. 4에서 각 모델의 고유값에 대한 계산결과와 전체 매트릭스를 계산한 레퍼런스 모델과의 차이를 모드값에 따라 그래프로 나타내었다. Table 2에는 Fig. 4에서 나타난 오차 벡터에 대해 프로베니우스 norm을 취하여 수치적인 방법으로 각 오차 값의 차이를 비교할 수 있도록 나타내었다.

강성 다중점 구속조건을 기존의 방법으로 적용했을 때의 결과는 정적 요소만 고려한 정적 보정방법(static correction)으로 간주할 수 있다. Fig. 4에서 기존의 방법인 정적 보정방법을 기준으로 동적 보정방법을 반복적용한 횟수가 늘어나면 고유값에 대한 오차가 확연히 줄어드는 것을 확인할 수 있으며 이러한 오차의 감소가 특정 모드에서만 일어나는 것이 아니라 전체 구간에서 오차가 감소하는 것으로 확인된다. Fig. 4에서 동적 보정방법을 반복 적용하는 횟수를 늘리면 상대적인 오차가 줄어들음을 확인할 수 있으나 그 정

Table 1 Gearbox housing material&mesh property

Property	Value
Young's modulus (E)	7.8e+10 (Pa)
Poisson ratio (ν)	0.34
Density (ρ)	2750 (kg/m ³)
Total node number	6739
Total element number	26236

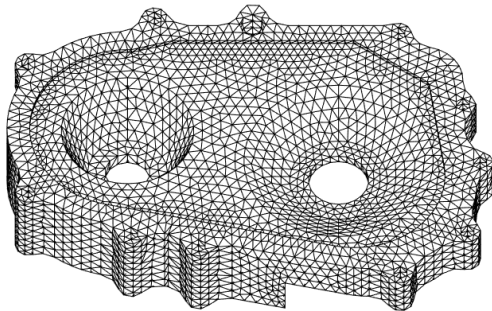


Fig. 2 Gearbox housing implemented by tetrahedron element

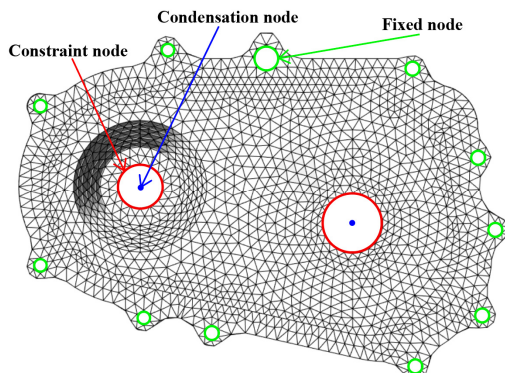


Fig. 3 Denotation of each type area at gearbox housing

Table 2 Frobenius norm of eigenvalue error

Correction type	Static	1 st Dyn.	3 rd Dyn.
Fro. norm	100.90	16.63	1.02

확도의 향상폭은 반복할수록 줄어드는 경향을 보이기 때문에 3rd dynamic correction까지만 적용하였다. 상대적인 오차들을 수치적으로 표현한 Table 2에서 프로베니우스 norm을 취했을 때 정적 보정방법과 3차 동적 보정방법과의 차이는 약 100배 정도로 나타나는 것으로 확인된다.

Fig. 4의 결과를 통해 동적 보정방법을 사용한 모델이 정적 보정 방법보다 레퍼런스 모델의 진동특성을 더 많이 함축하고 있다는 것을 알 수 있었다. 기어박스 하우징에서 고유값을 잘 반영하는 차수 감소 모델링을 사용하면 하우징 구조에 대한 각 요소들마다의 진동특성을 더 잘 반영할 수 있어 외력에 대한 변형을 예측하는

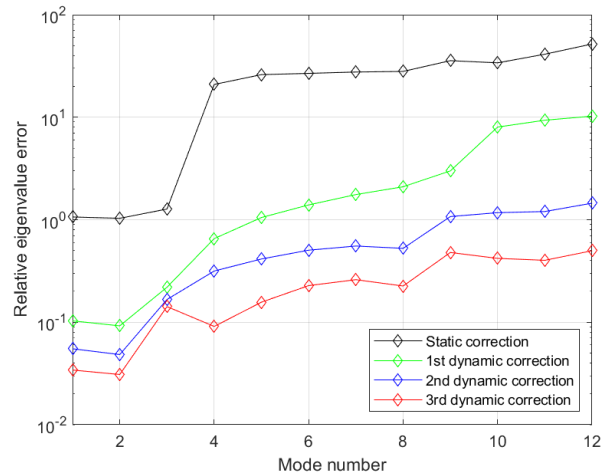


Fig. 4 Iterative scheme of dynamic correction graph

Table 3 Frobenius norm of displacement error matrix

	3 rd Dyn.	Static
x-direction	0.0143	0.0250
y-direction	0.0184	0.0214
z-direction	0.0129	0.0216

데 더욱 높은 정확도의 결과를 도출할 수 있을 것으로 판단되었다. 다음 섹션에서 진동수에 대한 고유값의 검증뿐만 아니라 외력에 대한 기어박스 하우징의 strain과 stress field를 구하여 하우징의 동적 거동에 대한 검증을 이어나가도록 한다.

3.3 Strain

강성 모델에서는 앞서 적용한 강성 다중점 구속조건에 따라 압축 노드에서 발생한 외력이 구속 노드에 전달되어 변위의 변형을 일으키게 된다. 기어박스 하우징에서 압축 노드에 발생하는 외력은 하우징이 샤프트의 진동으로 인해 받는 힘으로 간주할 수 있다. 압축 노드에서 시간에 따른 힘의 변화는 Newmark 방법을 사용하여 적용하였다^[10]. 하우징의 압축노드에 가해지는 외력은 1e+6 N의 크기로 사인함수의 주기를 갖도록 하였고 이러한 외력을 0초부터 10초 동안 가하도록 설정하였다. 단위 시간 간격은 1만분의 1초로 지정하여 Newmark 방법의 최소 시간 간격과 근접하게 구성하였다. 이와 같은 조건으로 시간에 따른 기어박스 하우징의 외력에 대한 변위의 변화량을 계산하였다.

Table 3은 외력을 가한 시간이 9초일 때 레퍼런스 모델의 변위와 각 모델의 변위의 차이를 프로베니우스 norm을 취하여 수치적인 결과값을 보여주고 있다. Table 3의 결과에서 동적 보정방법을 적용한 모델이 정적 보정방법을 적용한 모델보다 오차가 작게 나타남을 확인할 수 있었다. 각 좌표축에 대한 오차값을 위치별로 상세히 확인하기 위하여 Fig. 5에 각 방법에 대한 변위 변화량의

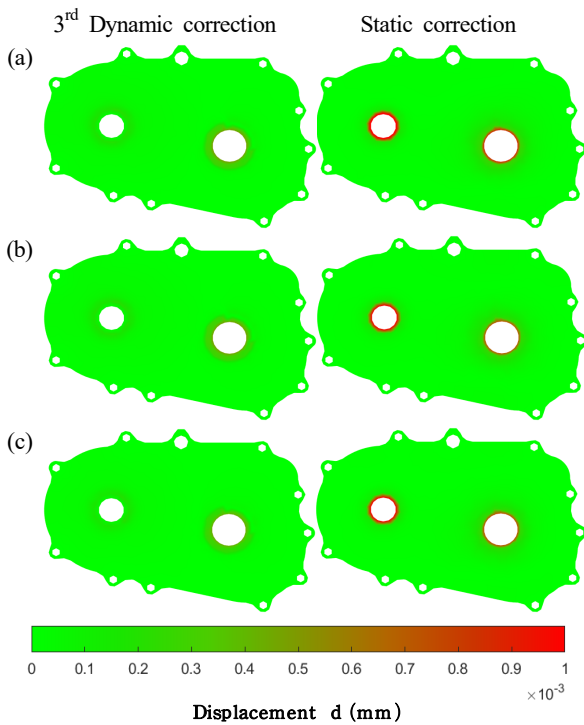


Fig. 5 Difference of displacement by direction at (t = 9 s) : (a) x-direction (b) y-direction (c) z-direction

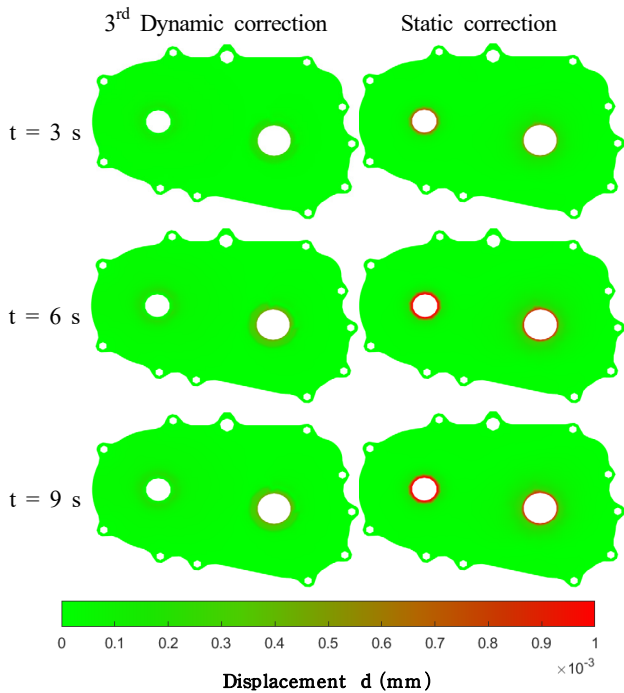


Fig. 6 Difference of displacement at each time to x-direction

오차값을 나타내었다. Fig. 5에서 x, y, z 모든 좌표축 방향에서 구속 노드의 위치를 기점으로 차이가 두드러지게 나타나는 것을 확인할 수 있었다.

수치해석 모델의 연속적인 시간 범위에서 각 방법을 적용한 두

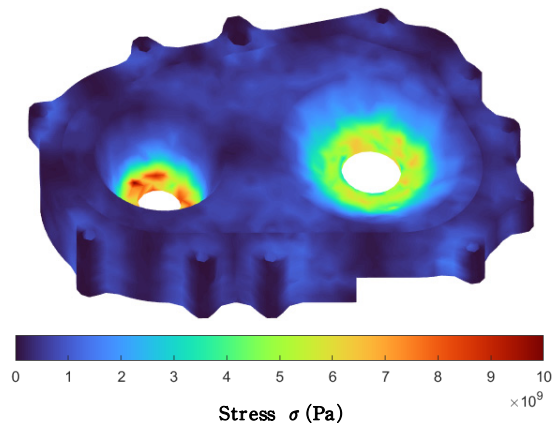


Fig. 7 Von mises stress distribution in reference model

모델의 정확성을 보이기 위해 초기 시간부터 일정한 간격으로 변위의 차이를 계산하여 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 6에서 시간이 흘러감에 따라 차이가 더욱 크게 나타나는 결과를 보였다. 변위의 변화량에 대한 결과를 토대로 동적 보정방법이 기존의 정적 보정방법보다 변위 변화에서 높은 정확도를 보이는 것을 확인할 수 있었다. 다음 섹션에서는 폰 미세스 스트레스를 계산하여 stress field에 대한 검증을 이어나간다.

3.4 Von mises stress

앞서 보였던 고유값과 strain field의 결과에 이어 stress field에서도 라그랑지 승수법을 적용한 강성 다중점 구속조건이 더 높은 정확도를 도출하는지 검증하기 위해 폰 미세스 스트레스를 구하여 비교하였다. 시간이 3초일 때 레퍼런스 모델의 폰 미세스 스트레스 분포도는 Fig. 7과 같이 나타난다. 스트레스의 분포는 강성 다중점 구속조건을 적용한 두 홀에 집중되어 있는 것을 확인할 수 있었다.

Fig. 8에는 앞에서 비교하였던 각 방법들의 폰 미세스 스트레스 값을 계산한 결과와 레퍼런스 모델의 결과와의 차이값을 도출하여 도식화하여 나타내었다. Fig. 8에서 정적 보정방법은 동적 보정방법보다 상대적으로 오차값이 더 큰 것을 확인할 수 있었다. Fig. 9에서는 각 방법에 대한 결과값의 최대 오차를 레퍼런스 모델에 대해 백분율로 구한 것으로 계산된 모든 시간 영역에서 동적 보정방법이 기존의 방법보다 높은 정확도를 보여주는 것을 알 수 있었다.

Fig. 8과 Fig 9에서 폰 미세스 스트레스를 계산하여 얻은 stress field 결과는 동적 보정방법을 적용한 기어박스 하우징 모델이 정적 보정방법을 적용한 기존의 방법보다 더 높은 정확도를 얻을 수 있음을 보여주었다. 3차 동적 보정방법은 기존의 정적 보정방법의 오차에 비해 약 10% 정도 오차가 감소하는 효과를 보이는 것으로 나타났으며 동적 보정방법의 차수가 높아짐에 따라 전체 시간 구간에서 오차를 더 감소시킬 수 있는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 라그랑지 승수법을 적용한 강성 다중점 구속조건이 하우징의 동적

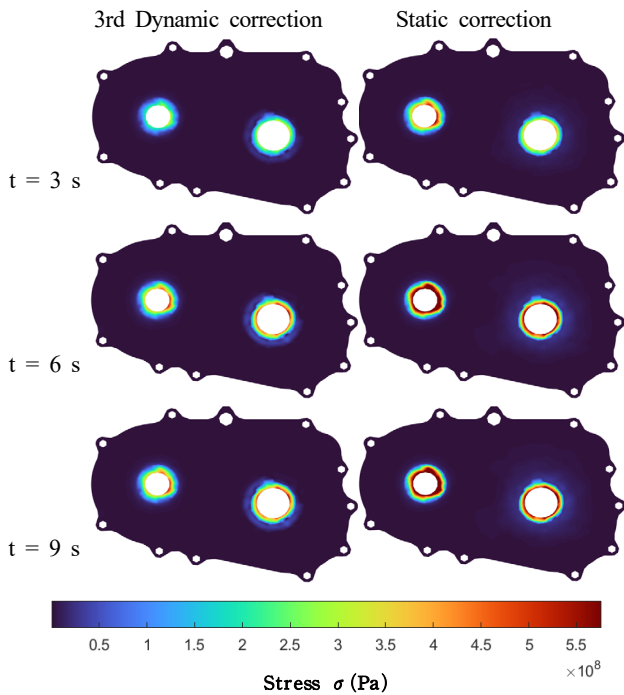


Fig. 8 Difference of von mises stress besides of reference model

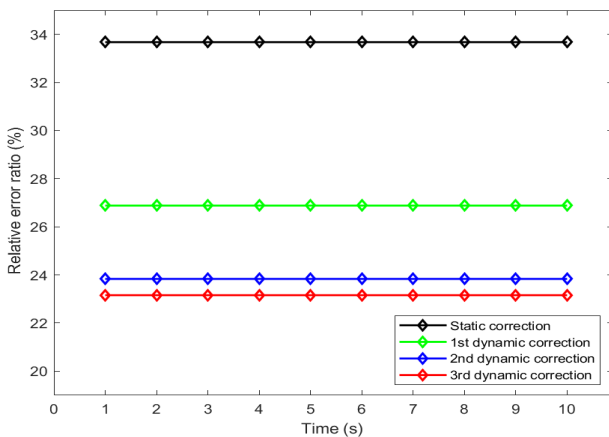


Fig. 9 Difference ratio of von mises stress

거동을 기존 방법에 비해 더 높은 정확도로 표현할 수 있음이 확인된다. 다음 섹션에서는 컴퓨터 계산비용에 대한 이점을 확인한다.

3.5 Cost time

동적 보정방법에 대한 컴퓨터 계산비용을 상대적으로 가늠하기 위해 전체 매트릭스를 계산하는 레퍼런스 모델과 정적 보정방법, 동적 보정방법의 계산시간을 비교한 결과를 Table 4에 나타내었다. 정적 보정방법과 3차 동적 보정방법을 사용한 계산비용은 레퍼런스 모델을 계산할 때 사용되는 계산비용의 각 4.1%와 8.9% 수준으로 측정되었다. 동적 보정방법의 차수를 늘릴 때마다 레퍼런스 계산비용의 약 1.6%에 해당하는 값이 증가함을 알 수 있었다.

Table 4 Computational cost by applied method

Type	Computational time (s)
Reference (full matrix)	2709
Static correction	112
1 st Dynamic correction	153
2 nd Dynamic correction	196
3 rd Dynamic correction	242

앞의 섹션에서 보였던 정적 보정방법에 비해 동적 보정방법의 높은 정확도를 감안하면 추가적인 낮은 계산비용으로 높은 정확도를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다.

4. 결론

본 논문에서는 전기자동차용 기어박스 하우징에서의 효율적인 수치해석을 위한 차수 감소 방법과 해당 방법론이 적용된 모델을 제시하였다. 제시된 모델은 하우징 자체의 진동 효과와 함께 하우징 모델 내부의 다른 기계요소들이 전달하는 진동 영향을 추가적으로 고려할 수 있도록 하우징 모델에 강성 MPCs를 적용하였다. 그리고 앞서 언급한 MPCs의 적용 과정과 차수 감소 과정을 통합하기 위해 Lagrange 승수법을 기반으로 하는 지배방정식을 사용하였다. 또한 하우징 모델의 차수 감축 과정에서 방정식의 개수가 줄어들어 따라 불가피하게 발생하는 오차에 대해 차원의 변화 없이 보상하고자 고성능 동적 보정방법을 추가적으로 적용하였다. 결과적으로, 제안된 감축 모델은 샤프트, 기어 등의 다른 기계요소의 진동 영향이 고려될 수 있는 연결점을 가지면서도 감축 전 수치 모델 계산비용의 8.9%에 해당하는 계산비용만을 필요로 하여 계산비용을 크게 절감할 수 있음이 확인되었다. 이와 더불어, 본 논문에서 적용한 동적 보정방법으로 인해 감축 차원을 증가시키지 않았음에도 동적 보상이 적용되지 않은 감축 모델보다 100배 이상의 정확도를 가지는 감축 모델을 확보할 수 있었다. 또한 본 논문에서 사용된 하우징의 감축 과정 및 그것의 수치 모델이 단일물리계에서의 하우징 및 강성 MPCs에 국한되지 않기 때문에, 본 논문에서의 핵심 아이디어인 다중 물리계 하에서의 하우징 거동 및 기타 물리적 변위 제한을 구현할 수 있는 선형 제약조건 등과도 쉽게 응용될 수 있다고 판단된다.

References

[1] Inoue, K., Yamanaka, M., Kihara, M., 2002, Optimum Stiffener Layout for the Reduction of Vibration and Noise of Gearbox Housing, *J. Mech. Des.*, 124:3 518-523, <https://doi.org/10.1115/>

1.1480817.

- [2] Abbes, M. S., Fakhfakh, T., Haddar, M., 2005, Gearbox Vibratory Analysis using Carring, Coupling, and Slave Substructures, *Int. J. Simul. Model.*, 4:2 67-75, [https://doi.org/10.2507/IJSIMM04\(2\)2.043](https://doi.org/10.2507/IJSIMM04(2)2.043).
- [3] Abbes, M. S., Bouaziz, S., Chaari, F., Maatar, M., Haddar, M., 2008, An Acoustic-structural Interaction Modelling for the Evaluation of a Gearbox-radiated Noise, *Int. J. Mech. Sci.*, 50:3 569-577, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.08.002>.
- [4] Chung, I. S., Kim, J.-G., Chae, S.-W., Park, K. C., 2021, An Iterative Scheme of Flexibility-based Component Mode Synthesis with Higher-order Residual Modal Compensation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 122:13 3171-3190, <https://doi.org/10.1002/nme.6656>.
- [5] Ahn, J.-G., Yang, H.-I., Kim, J.-G., 2020, Multipoint Constraints with Lagrange Multiplier for System Dynamics and its Reduced-order Modeling, *AIAA J.*, 58:1 385-401, <https://doi.org/10.2514/1.J058118>.
- [6] Heriman, G. H. K., Desmet, W., 2010, Interface Reduction of Flexible Bodies for Efficient Modeling of Body Flexibility in Multibody Dynamics, *Multibody Syst. Dyn.*, 24:2 219-234, <https://doi.org/10.1007/s11044-010-9198-7>.
- [7] Chow, E., Manteuffel, T. A., Tong, C., Wallin, B. K., 2003, Algebraic elimination of slide surface constraints in implicit structural analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 57:8 1129-1144, <https://doi.org/10.1002/nme.720>.
- [8] Liu, G. R., Quek, S. S., 2014, *The Finite Element Method: A Practical Course*, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK.
- [9] Kim, J.-G., Lee, P.-S., 2015, An Enhanced Craig-bampton Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 103:2 79-93, <https://doi.org/10.1002/nme.4880>.
- [10] Chopra, A. K., 2011, *Dynamics of Structures*, Prentice Hall_Pearson, New Jersey, USA.



Sung-Eun Kim

M.S-Ph.D integrate course in the Department of Mechanical Engineering, Hanyang University.

His research interest is numerical simulation.

E-mail: kaste@hanyang.ac.kr



Jae-Chul Lee

Senior Researcher in the Material & Component Convergence R&D Department, Korea Institute of Industrial Technology (KITECH).

His research interests are carbon material, composites, and FEM.

E-mail: jc2@kitech.re.kr



Jun-Geol Ahn

M.S-Ph.D integrate course in the Department of Mechanical Engineering, Hanyang University.

His research interest is numerical simulation.

E-mail: anjonkoul@hanyang.ac.kr



Hyun-ik Yang

He is a full professor in the Dept. of Mechanical Engineering at Hanyang University ERICA Campus, Korea.

His research fields are Mechanical Design and Optimization, Offshore Structure Design, Welding Process Optimization and Hydrothermal Polymerization.

E-mail: skynet@hanyang.ac.kr